

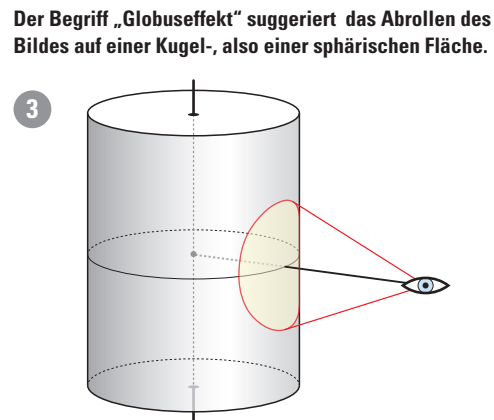
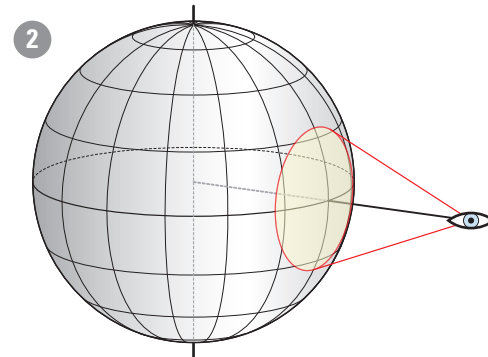
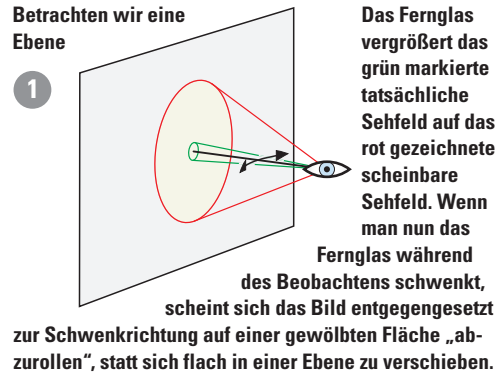
# Wie der **Globuseffekt** entsteht und warum er **Zylindereffekt** heißen müsste

© Walter E. Schön

Vielen (aber nicht allen) Fernglasbeobachtern ist gelegentlich aufgefallen, dass beim horizontalen Schwenken eines Fernglases, z.B. beim „Abscannen“ des Horizonts, das Bild im kreisrunden Sehfeld nicht wie ein ebenes Foto, sondern wie auf einer gewölbten Fläche vorbei zu gleiten scheint. Diesen Effekt hat irgendjemand als „**Globuseffekt**“ bezeichnet, vermutlich nur, weil ein Globus eine gewölbte Oberfläche hat und kreisrund wie das Sehfeld im Fernglas ist. Andere haben diesen recht anschaulichen Begriff ohne viel nachzudenken übernommen, und so hat er sich unter Fernglasfreunden etabliert. Aber weil nicht jeder diese Wölbung des Fernglasbildes wahrnimmt und weil offenbar auch niemand recht weiß, wie sie entsteht, wurde und wird darüber viel spekuliert und gestritten.

Die von Dr. Holger Merlitz zuerst im Jülich-Fernglasforum vorgestellte und etwas später im Januar 2010 unter dem Titel „*Distortion of binoculars revisited: Does the sweet spot exist?*“ (J. Opt. Soc. AM. A/Vol.27, No.1/Jan. 2010) veröffentlichte „Erklärung“ des Globuseffekts sieht zunächst wissenschaftlich aus, basiert aber auf falschen Annahmen und hat mit dem Globuseffekt nichts zu tun, was ich bereits 2009 im Jülich-Forum kritisiert hatte.

Inzwischen hat Dr. Merlitz seine Darstellung etwas ausgearbeitet bei Wikipedia veröffentlicht, was mir leider entgangen war, weil ich das Jülich-Forum um 2012 verlassen hatte. Doch kürzlich wurde ich durch einen Hinweis darauf aufmerksam gemacht. Daher habe ich eine korrekte und, da die Sache nicht trivial ist, auch für mathematisch wenig Versierte verständliche Erklärung des Globuseffekts verfasst, der eigentlich ein **Zylindereffekt** ist.



Also werden wir alle Überlegungen erst ohne Einsatz trigonometrischer Winkelfunktionen und algebraischer Formeln, jedoch mit den richtigen Fragen und mit logischem Denken anhand maßstäblicher Zeichnungen praxisgerechter Beispiele anstellen. Ursache und Wirkungen des „Globuseffekts“ sollen damit **plausibel** werden. Danach muss freilich eine präzise **mathematische Beweisführung von allgemeiner Gültigkeit** für x-beliebige Fernglasvergrößerungen, Schwenk- sowie tatsächliche und scheinbare Sehwinkel folgen. Wir werden dabei von horizontaler Fernglas-schwenkung als dem mit Abstand häufigsten Fall ausgehen, doch gelten alle Überlegungen und Ergebnisse analog dazu ebenso beim Schwenken in jeder anderen Orientierung.

## 1. Grundlagen für unser praktisches Beispiel

Speziell für die Zeichnungen sind einige konkrete Parameter festzulegen, die idealerweise so praxisnah wie möglich sein sollten:

Wir wählen für das Fernglas die meistbenutzte 8fache Vergrößerung und als scheinbaren Sehwinkel glatte  $60^\circ$ . Das ergibt bei einem **orthoskopisch abbildenden, also nicht verzeichnenden Fernglas** als tatsächlichen Sehwinkel  $8,2556^\circ$ . Weil der „Globuseffekt“ nicht nur bei binokularen, sondern auch bei monokularen Ferngläsern, Spektiven und (astronomischen) Fernrohren auftritt, reicht uns in den Zeichnungen der Strahlengang monokularer Systeme (eines Fernglasrohrs). Damit in den Beispiel-Zeichnungen die vom Schwenken verursachten winzigen Veränderungen deutlich erkennbar sind, können wir nicht in unendlich kleinen, sondern müssen in relativ groben Schwenkwinkel-Schritten vorgehen.



Dieses Foto umfasst einen  $60^\circ$  großen horizontalen Sehwinkel. Ein nicht verzeichnendes 8fach vergrößerndes Fernglas mit ebenfalls  $60^\circ$  scheinbarem Sehwinkel gibt in seinem runden Sehfeld (roter Kreis) einen Ausschnitt von  $1/8$  der Bildbreite wieder, den wir ohne Fernglas in einem  $8,2556^\circ$  großen tatsächlichen Sehwinkel sehen.



Die beobachtete weit entfernte Szene ist normalerweise räumlich (3D). Das Fernglasobjektiv erzeugt davon wie das Objektiv einer Kamera intern vor dem Okular ein reelles ebenes Bild (2D). Nur deutlich nähere oder weitere Gegenstände werden knapp hinter oder vor der Bildebene und deshalb leicht unscharf abgebildet. Das Fernglasokular zeigt wie eine Lupe diese reelle Bildebene dem Beobachter als virtuelle Bildebene. Also sieht der Beobachter einen vergrößerten kreisförmigen Ausschnitt als ebenes Bild. Aber warum scheint sich das Bild beim Schwenken des Fernglases zu wölben?

## 2. Wir haben einige Begriffe zu vereinbaren

Um Missverständnisse zu vermeiden, müssen wir einige Begriffe eindeutig definieren, die auch anders verstanden werden könnten:

**Position des Beobachters** ist ohne Fernglas die Pupillenmitte des beobachtenden Auges, mit Fernglas die des Fernglasobjektivs.

**Blickrichtung** ist die Richtung von der Pupillenmitte des Auges bzw. Fernglasobjektivs zum beobachteten Gegenstands- oder Bildpunkt, der auf der Netzhaut des Auges in der Foveola (Ort des schärfsten Sehens) abgebildet wird. Die Blickrichtung des Fernglases zeigt immer auf den im Zentrum des kreisrunden Sehfelds abgebildeten Gegenstandspunkt. Die Blickrichtung des durchs Fernglas beobachtenden Auges kann jedoch auch auf andere Punkte im Sehfeld zeigen.

**Tatsächlicher oder scheinbarer Sehwinkel**  $2\sigma$  bzw.  $2\sigma'$  ist jeweils der volle Winkel beiderseits der optischen Achse, unter dem das



Markante Punkt (z. B. Hauskanten) liegen unterschiedlich weit und haben zur Haupt-Blickrichtung verschiedene Sehwinkel. Schwenkt die Haupt-Blickrichtung, ...

Fernglas tatsächlich bzw. das Auge scheinbar den Durchmesser (insbesondere Breite oder Höhe) des Fernglassehfeldes sieht.

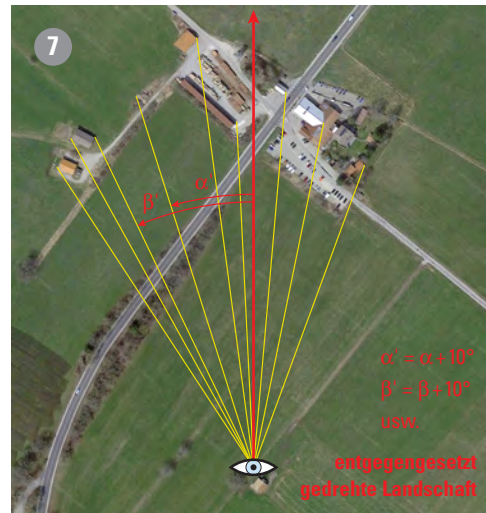
Als **Sehwinkel**  $\alpha$ ,  $\beta$ , ... wird hier von mir der Winkel bezeichnet, um den eine (Blick-)Richtung von einer Referenz-Achse, z. B. der des Fernglasobjektivs oder -okulars, abweicht.

## 3. Wir stellen die entscheidenden Fragen

Wie festgestellt, scheint sich das eigentlich ebene virtuelle Fernglasbild entgegengesetzt zur Schwenkrichtung wie auf einer Kugel- (?) oder Zylinderoberfläche zu drehen, statt sich in der Bildebene zu verschieben.

Aber **woran erkennen wir eine Wölbung** der Bildfläche, obwohl wir mit einem Auge gar nicht dreidimensional sehen können?

**Warum geschieht das nur beim Schwenken** des Fernglases, aber weder beim stationären Beobachten noch, wenn wir den Blick ohne ein **vergrößerndes Fernglas** schwenken?



... sieht es für den Betrachter genauso aus, als ob er nicht den Blick geschwenkt, sondern sich die Landschaft um ihn im entgegengesetzten Sinn gedreht hätte.

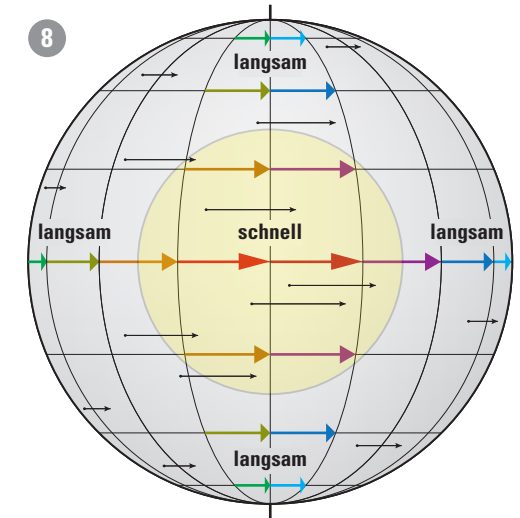
Da der Name „Globuseffekt“ vermuten lässt, das Fernglasbild rolle wie auf einer Kugel ab, obwohl es auch eine Zylinderoberfläche sein könnte, stellt sich die Frage, wie wir rotierende gewölbte Flächen erkennen und eine Kugel vom Zylinder unterscheiden, selbst wenn wir von der Kugel und vom Zylinder nur einen Ausschnitt (Abb. 8/9, gelbe Fläche) sehen.

## 4. Was sehen wir bei sphärischer Wölbung?

Wegen der Bezeichnung „Globuseffekt“ beginnen wir mit einem **rotierenden Globus** mit Meridianen (Großkreisen durch die Pole) und Äquator. Wir betrachten ihn nicht perspektivisch wie in der Abb. 2, sondern parallel zur Äquatorebene und, um perspektivische Verzerrungen zu vermeiden (gekrümmte statt geradlinige Breitenkreise), aus sehr großer, also quasi unendlicher Entfernung. Dass uns die elliptisch gekrümmten Meridiane bereits eine Wölbung vorgaukeln, darf uns nicht zu voreiligen Schlüssen verleiten, denn kein übliches Fernglas-Beobachtungsobjekt enthält Meridiane. Sie sollen uns hier nur helfen, die spezielle Bewegung beliebiger Punkte auf der um eine vertikale Achse rotierenden Kugeloberfläche leichter zu analysieren.

Die für gute Übersichtlichkeit hier nur 16 Meridiane der vollen Kugel haben jeweils  $22,5^\circ$  ( $= 360^\circ : 16$ ) Abstand zum Nachbarmeridian. Dreht sich der Globus im Zeitintervall  $\Delta t$  um  $22,5^\circ$ , bewegt sich jeder x-beliebige Punkt eines Meridians genau bis zum entsprechenden Punkt gleicher geografischer Breite des vorherigen Nachbarmeridians (bunte Pfeile).

Das bedeutet, dass sich **a) Punkte nahe der senkrechten Mittellinie** auf dem Äquator wie darunter und darüber am weitesten, also am schnellsten, und alle links und rechts davon um so langsamer bewegen, je näher sie dem seitlichen Rand sind. Das könnte im Bild des



Beim rotierenden Globus verursacht die oben und unten langsamere Bewegung die Krümmung vertikaler Linien.

geschwenkten Fernglases auch so sein – wir werden es noch untersuchen. Das Fernglasbild kann jedoch bestenfalls nur einem Ausschnitt (z. B. der gelblichen Fläche) des rotierenden Globus entsprechen, weil beim vollen Globus die Bewegung am linken und rechten Rand zum Stillstand kommt, was im abrollenden Fernglasbild eindeutig nicht der Fall ist.

Wir sehen ferner, dass **b) Punkte nahe dem Äquator** die weitesten Wege und Punkt auf größerer geografischer Breite, je näher den Polen, desto kürzer werdende Wege zurücklegen, sich also immer langsamer bewegen.

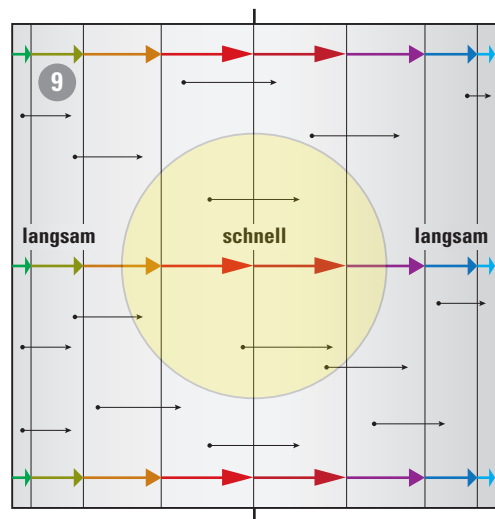
Das geschieht im Bild nicht verzeichnender Ferngläser aber nicht; dort bewegen sich vertikal über-/untereinander liegende Punkte exakt mit derselben horizontalen Geschwindigkeit. Senkrechte Linien wie Gebäudekanten, Fahnenstangen oder Fichtenstämme (Abb. 10) müssten wir sonst links und rechts wie die Meridiane gekrümmt sehen. Damit ist der „Globus“ als Namensgeber des Effekts **disqualifiziert**, es gibt keinen „Globuseffekt“.

Weil also die scheinbare Bildfeldwölbung im Fernglas beim Schwenken nicht sphärisch wie eine Globusoberfläche sein kann, wollen wir uns alternativ eine walzen- oder zylinderförmige Wölbung genauer ansehen.

### 5. Wie verrät sich zylindrische Wölbung?

Wir nehmen einen **Zylinder mit senkrechter Achse**, den wir wie zuvor den Globus nicht perspektivisch, sondern wie aus unendlicher Entfernung betrachten, sodass der Zylinder zum Rechteck wird. Wie beim Globus der Äquator stellt eine mittige horizontale Linie einen Kreis (auf dem Zylindermantel) dar. Ihr Schnittpunkt mit der Zylinderachse bildet die Mitte unseres Sehfelds. Analog zu den Meridianen beim Globus teilen wir den von oben gesehen kreisförmigen Zylinder mit senkrechten Linien in 16 Sektoren ein, die zueinander Winkel von jeweils  $22,5^\circ$  bilden.

Zu den seitlichen Rändern verdichten sich die senkrechten Linien – exakt wie die Meridiane am Äquator des Globus. Dreht sich der



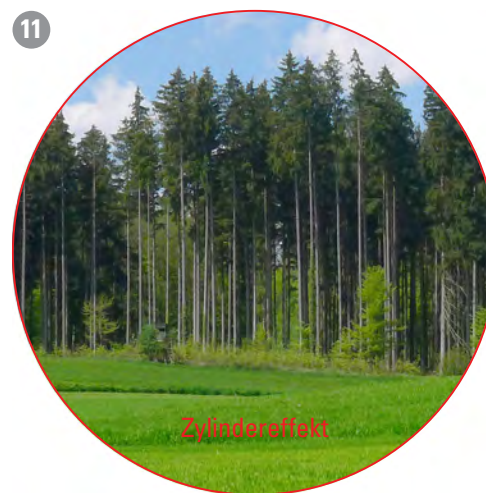
Beim rotierenden Zylinder ist die Bewegungsänderung von oben bis unten gleich, Senkrechten bleiben gerade.



Falls beim Abscannen dieses Waldrandes ein „Globuseffekt“ mit sphärischer Wölbung aufträte, müsste das Fernglasbild solche gekrümmte Fichtenstämmen zeigen.

Zylinder im Zeitintervall  $\Delta t$  genau um  $22,5^\circ$ , dann bewegt sich jeder x-beliebige Punkt jeder Linie bis zum entsprechenden Punkt auf gleicher Höhe der vorherigen Nachbarlinie (bunte Pfeile). Das bedeutet, dass auch hier die horizontale Bewegung in der Mitte am schnellsten ist und zu beiden seitlichen Rändern hin immer langsamer wird, um schließlich am Rand zum Stillstand zu kommen. Der **entscheidende Unterschied zum Globus** ist, dass das jedoch in völlig identischer Weise über die ganze Zylinderhöhe geschieht, also die **Bewegung oben, in der Mitte, unten und in jeder Höhe dazwischen exakt dieselbe** ist. Daher bleiben senkrechte Linien (anders als die Meridiane des Globus) während der Drehung über die volle Breite immer gerade.

Beim Schwenken eines nicht verzeichnenden Fernglases ist das genauso, und wir wissen auch schon, dass die beim Schwenken des Fernglases wahrnehmbare Wölbung nicht spärlich und somit kein „Globuseffekt“ ist. Dennoch können wir noch nicht mit absolu-



Wenn Ihr nicht verzeichnendes Fernglas die Stämme jedoch gerade zeigt, kann es sicher kein „Globuseffekt“, aber könnte möglicherweise ein „Zylinder“-Effekt sein.

ter Gewissheit von einem „Zylindereffekt“ reden. Das dürfen wir erst, wenn wir zusätzlich beweisen können, dass der **Verlauf der Geschwindigkeit**, mit der sich jeder x-beliebige Punkt von einem Rand langsam, dann rasch schneller werdend, mittig am schnellsten und dann wieder immer langsamer zum anderen Rand bewegt, **gleich oder sehr ähnlich dem ist, den wir im Fernglas sehen**.

### 6. Wie verläuft die Winkelgeschwindigkeit?

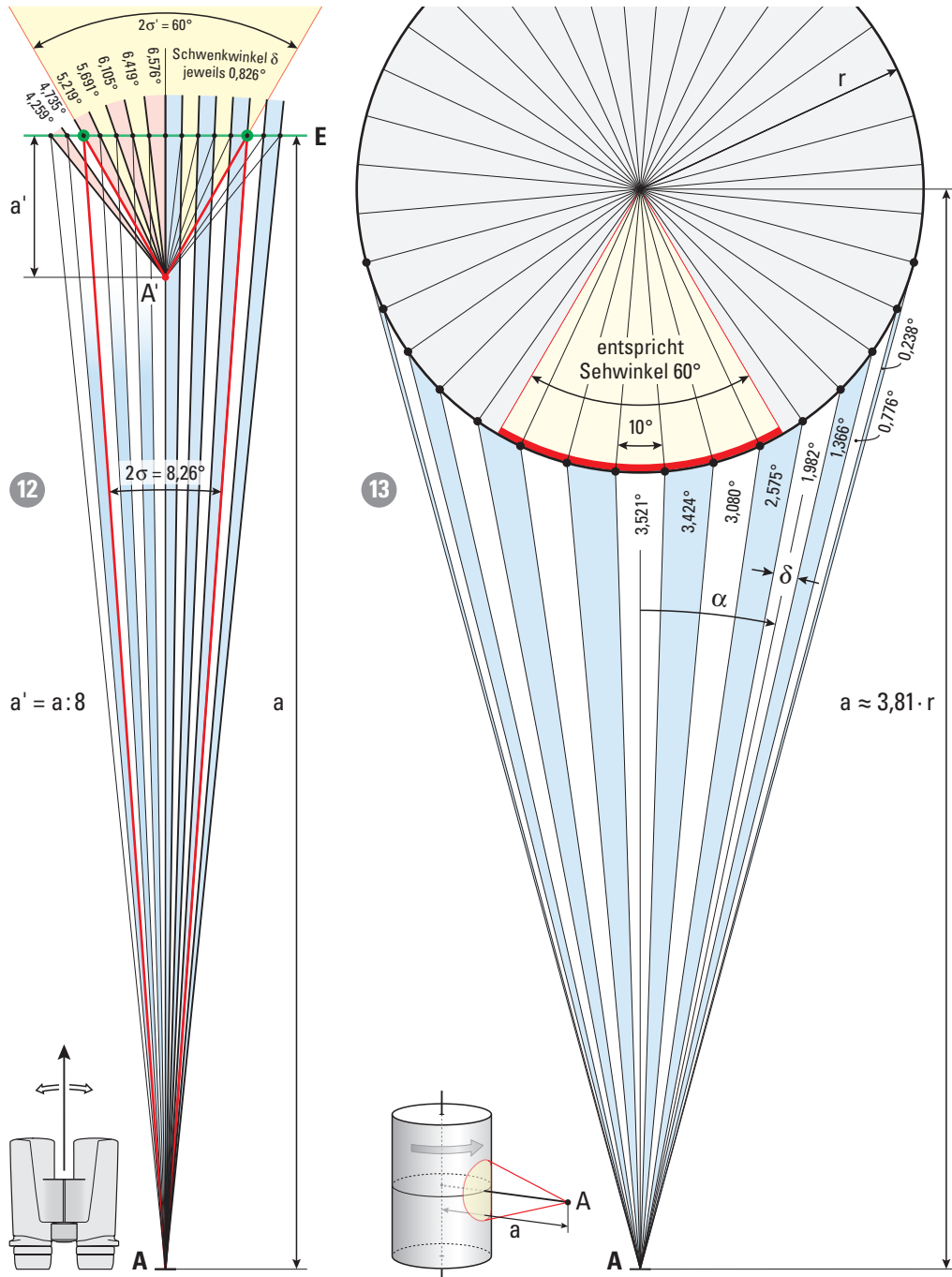
Wir sprachen von unterschiedlich schneller Bewegung. Das müssen wir präzisieren: Wir können Geschwindigkeit wie im täglichen Leben als Strecke pro Zeitintervall messen, aber, weil es hier um Schwenkung (Winkeländerung) und um tatsächliche oder scheinbare Sehwinkel geht, alternativ als Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in Grad pro Zeitintervall  $\Delta t$ . Tatsächlich bietet sich Letzteres an, weil das Besondere der Schwenkbewegung des Fernglases die in jedem Moment **für alle Blickrichtungen (Sehwinkel) gleiche Win-**

**kelgeschwindigkeit** ist: In den Abbildungen 6 und 7 sahen wir, dass sich die Sehwinkel zu allen nah und fern liegenden Gegenstandspunkten relativ zur Hauptblickrichtung fürs Auge wie fürs Fernglas im Intervall  $\Delta t$  um denselben Winkel, also mit derselben Winkelgeschwindigkeit ändern. Wenn wir den Sehwinkel zu einem x-beliebigen Punkt mit  $\alpha$  bezeichnen, dann ist dort die **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega_\alpha = \omega_0$ , also exakt dieselbe wie für den Sehwinkel  $0^\circ$  (= Hauptblickrichtung).

Das gilt aber nur aus Sicht des Fernglases im tatsächlichen Sehwinkel. Das Auge dagegen sieht durchs Fernglas **im scheinbaren Sehwinkel andere Winkelgeschwindigkeiten**. Die Fernglasvergrößerung  $n > 1$  verursacht diese Änderung, da sie im Fernglasbild **nicht Winkel, sondern Strecken vergrößert**, z. B. um den Faktor 8. Lediglich im Mittelpunkt des scheinbaren Sehfeldes sowie genau senkrecht darüber und darunter, wo es zu keiner seitlichen Verschiebung(skomponente) durch die Fernglasvergrößerung kommt, wird die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'_0$  das n-Fache der Schwenkungs-Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ .

Diese Auswirkung der **Fernglasvergrößerung** sehen wir uns auf der folgenden Seite an.

Abb. 12 zeigt, welche Winkelschritte bzw. dazu proportionale Winkelgeschwindigkeiten ein Beobachter A' beim Schwenken eines 8fach vergrößernden Fernglases wahrnimmt, Abb. 13 im Vergleich dazu, welche Winkelschritte bzw. Winkelgeschwindigkeiten der Beobachter A eines rotierenden Zylinders sieht. Abb. 14 schließlich zeigt, dass die Winkelgeschwindigkeiten beider Beobachter als interpolierte Kurven über den vollen scheinbaren Sehwinkel üblicher Ferngläser hinweg einen fast identischen Verlauf zeigen. Somit ist uns der Beweis gelungen, dass es einen **Zylindereffekt** und **keinen Globuseffekt** gibt.

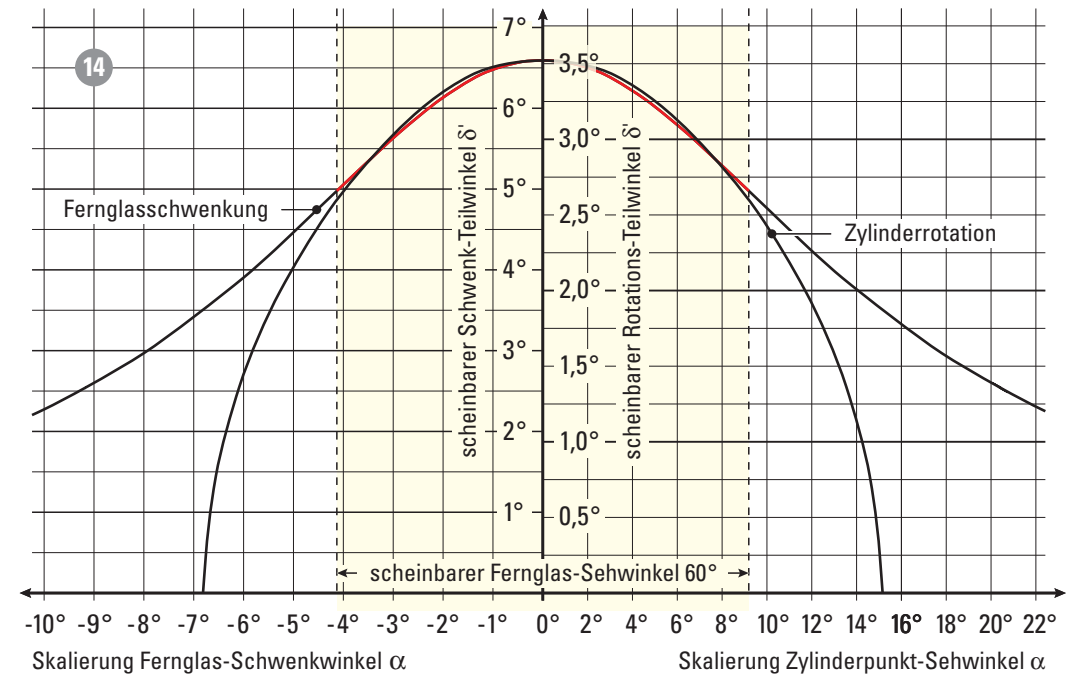


**Abb. 12:** Ein Beobachter bei **A** schaut in ein 8fach vergrößerndes Fernglas mit scheinbarem Sehwinkel  $60^\circ$  rechtwinklig auf die grün gezeichnete Wand **E**. Er sieht die Wand, als stünde er bei **A'** in  $1/8$  seines tatsächlichen Abstandes  $a$ . Große grüne Punkte markieren auf der Wand die Sehfeldränder. Den tatsächlichen Sehwinkel  $2\sigma' = 8,2556^\circ$  teilen wir in 10 gleich große Teilwinkel  $\delta = 0,82556^\circ$  und markieren sie auf der Ebene **E** mit kleinen Punkten. Wir erweitern diese Teilung beiderseits um zwei auf insgesamt 14 Teilwinkel, die abwechselnd hellblau und weiß gefärbt sind. Schwenken wir die Blickrichtung schrittweise um einen Teilwinkel  $\delta$ , so wandern alle Punkte mit gleicher Winkelgeschwindigkeit zu ihrem Nachbarpunkt. Im scheinbaren Sehfeld des Beobachters **A'** erfolgen die Punkt-zu-Punkt-Sprünge jedoch in den rosa statt hellblau gefärbten Teilwinkeln  $\delta'$ , die nun nicht mehr gleich groß sind,

sondern aufgrund der **Fernglasvergrößerung** (weil hier  $\tan \alpha > \alpha$ ) von der Mitte zum Rand immer rascher kleiner werden. Proportional dazu ändert sich im scheinbaren Sehfeld die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$ , wie es der interpolierte Kurvenverlauf unten in Abb. 14 zeigt.

**Abb 13:** Dieser Zylinder hat auf seinem Umfang durch Punkte markierte vertikale Linien im Winkelabstand von je  $10^\circ$ . Bei Rotation in jeweils  $10^\circ$ -Schritten wandert jeder Punkt zu seinem Nachbarpunkt. Dem Betrachter bei **A** erscheinen diese Schritte aber in von der Mitte ( $3,521^\circ$ ) zu den Rändern immer schneller kleiner werdenden Winkeln (bis  $0,238^\circ$ ).

**Abb. 14** zeigt beide Verläufe der Winkel und so auch der dazu proportionalen Winkelgeschwindigkeiten. Bei passender Skalierung der x-Achse verlaufen beide Kurven innerhalb des Seh winkels  $2\sigma' = 60^\circ$  sehr ähnlich, in der exakten Berechnung sogar fast gleich.



## 7. Was sich bei anderer Vergrößerung ändert

Die Vergrößerung 8fach hatten wir gewählt, weil sie bei Ferngläsern die mit Abstand populärste ist. Wir können gewiss davon ausgehen, dass sich bei 7facher, 10facher oder 12facher Vergrößerung kaum etwas ändert.

Aber was ist bei 2- bis 3facher Vergrößerung üblicher Opern- oder Theatergläser oder bei 80facher von Spektiven oder sogar weit über 100facher von astronomischen Fernrohren?

**Für 2- oder 3fache Vergrößerung** könnten wir Zeichnungen wie Abb. 12 machen, für sehr hohe Vergrößerungen wären sie riesig groß. Aber weil die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bei einfacher Vergrößerung (= ohne Fernglas) über die volle Bildbreite konstant ist und bei 8facher Vergrößerung und  $2\sigma' = 60^\circ$  an den seitlichen Rändern auf ca. 76% abfällt (Abb. 14), wäre bei 2- bis 3facher Vergrößerung ein Abfall auf etwa 90% zu erwarten. Doch die mathematische Berechnung zeigt, dass die Winkelgeschwindigkeit schon bei sehr niedriger Vergrößerung unerwartet stark abfällt, nämlich bei 2fach und  $2\sigma' = 60^\circ$  auf 81%, wie Abb. 15 als berechnetes Ergebnis zeigt.

Dennoch ist der Zylindereffekt bei so niedrigen Vergrößerungen in der Praxis irrelevant, weil man in der Oper oder im Theater kaum nennenswert schwenken wird, die scheinbaren Sehwinkel der hier nur möglichen Galileischen Konstruktionen (Okular mit negativer Brennweite, ohne Umkehrprismen, keine reelle Austrittspupille) höchstens um  $40^\circ$  bis  $45^\circ$  statt um  $60^\circ$  liegen und daher die Winkelgeschwindigkeit nur auf etwa 90% abfällt.

**Bei höheren Vergrößerungen als 8fach** hingegen nimmt der Winkelgeschwindigkeitsabfall zum Rand hin kaum noch zu. Bei 16facher Vergrößerung erreicht er nur 75%, weshalb die entsprechende Kurve in Abb. 15 gar nicht

erst eingezeichnet ist, weil sie fast gänzlich innerhalb der Strichstärke der roten Grenzkurve für unendliche Vergrößerung läge.

Der Zylindereffekt ist darum selbst bei hochvergrößernden Spektiven und bei astronomischen Fernrohren nicht von dem bei 8facher Fernglasvergrößerung zu unterscheiden.

## 8. Ist die Schwenkgeschwindigkeit relevant?

Der Zylindereffekt stellt sich erst ein, wenn das Fernglas geschwenkt wird. In den bisherigen geometrischen Überlegungen hatte die Schwenkgeschwindigkeit keinen Einfluss auf den Effekt. Sie muss nur groß genug sein, um den zwar prozentual erheblichen (um 25% in Abb. 15), jedoch bei sehr geringer Schwenkgeschwindigkeit nur **winzigen absoluten** Winkelgeschwindigkeitsabfall überhaupt wahrnehmbar zu machen. Wann genau das der Fall ist, kann nicht mathematisch berechnet, sondern müsste statistisch durch Versuche mit zahlreichen Probanden ermittelt werden.

## 9. Waren die Ergebnisse vielleicht ungenau?

Wir mussten in den Zeichnungen große Winkelschritte für die Schwenkungen wählen, damit die Details nicht zu winzig und somit zu schlecht erkennbar werden. Das gilt für die Fernglasschwenkung wie für die Zylinderdrehung. Deshalb erhielten wir keinen kontinuierlichen Verlauf der Winkelgeschwindigkeiten, sondern nur grobe Stützwerte in großen Abständen und mussten für eine glatte Kurve in Abb. 14 interpolieren. Es ist so, als wollten wir den Umfang eines Kreises berechnen und zählten dafür z.B. die 16 Strecken zwischen den Ecken eines 16-Ecks zusammen. Der Vergleich mit den berechneten Kurven in Abb. 15 und Abb. 16 zeigt uns aber, dass die Kurven in Abb. 14 und die dortige Übereinstimmung mit der Zylinderdrehung doch recht gut waren.

## Die exakte Berechnung für beliebige Vergrößerungen und Sehwinkel

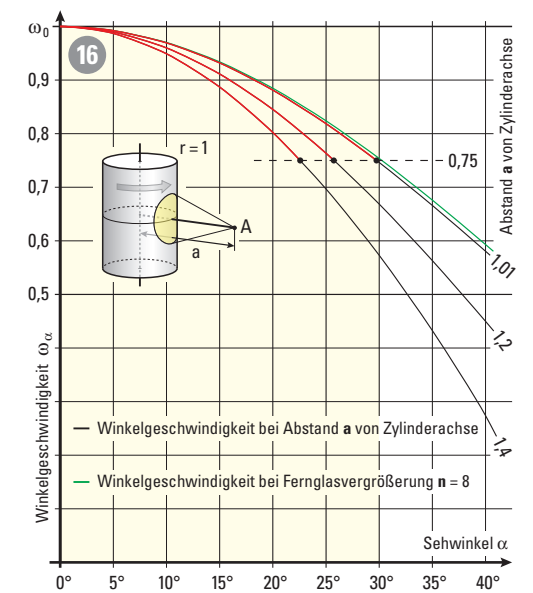
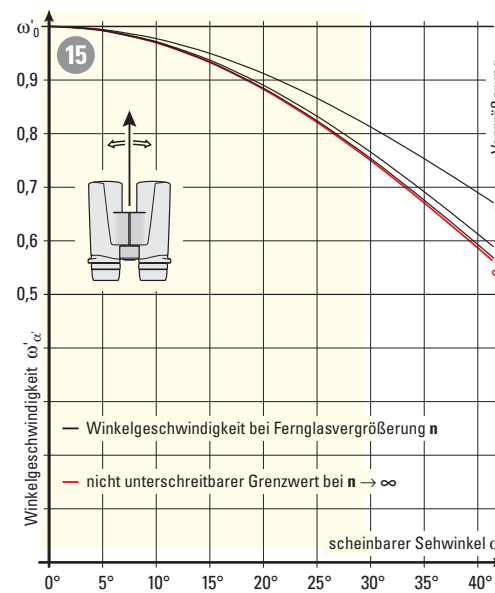
Für alle, die noch mit Winkelfunktionen und algebraischen Formeln umgehen können

Dass die bei geschwenktem Fernglas wahrgenommene Wölbung nicht sphärisch wie die einer Globusoberfläche sein kann, wurde in Absatz 4 mit Abb. 8 und 10 bewiesen, da sie eine tonnenförmige Verzeichnung zur Folge hätte, die aber nachweislich nicht stattfindet.

Also müssen wir nur das Verhalten des Fernglasbildes **allgemeingültig**, d.h. für beliebige Vergrößerungen  $n \geq 1$  statt nur für 8fach und für beliebige scheinbare Sehwinkel  $2\sigma'$  statt nur  $60^\circ$  sowie die beobachtbare Bewegung auf einer rotierenden Zylinderoberfläche für beliebige Faktoren  $a$ , um die der Betrachterabstand ab Zylinderachse größer ist als der Zylinderradius, in mathematische Gleichungen fassen. Als **Ergebnis der Seiten 6 bis 8** erhalten wir in Abb. 15 und Abb. 16 die damit berechneten Kurven des jeweils wahrgenommenen Verlaufs der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'_{\alpha'}$  (Fernglasbild) bzw.  $\omega_{\alpha}$  (Zylinder) ei-

nes  $x$ -beliebigen Punktes im Sehfeld auf dem Weg von der vertikalen Mittellinie zum Rand in Abhängigkeit vom scheinbaren Sehwinkel  $\alpha'$  bzw.  $\alpha$ . Der Kurvenverlauf für die andere Sehfeldhälfte ist jeweils dazu symmetrisch. Die Kurven für 8fache Fernglasvergrößerung und für  $a = 1,01$  beim Zylinder sind hier fast deckungsgleich. Für größere  $a$  ist der Winkel zum gelben Sehfeldausschnitt (von jeweils etwa halber Zylinderbreite) auf dem Zylinder enger, z.B. für  $a = 1,2$  nur  $26^\circ$  und für  $a = 1,4$  nur noch  $22,5^\circ$ , da wir bei größerem Abstand  $a$  die Zylinderbreite kleiner, bei  $a > 2$  sogar kleiner als die Sehfeldbreite sehen. Also wird der gelbe Ausschnitt, innerhalb dessen die Winkelgeschwindigkeit der beim Fernglasschwenken entspricht, enger. Darum müssen wir gegebenenfalls die  $x$ -Achsen-Skalierung dazu umgekehrt proportional spreizen.

**Also ist der Zylindereffekt hiermit bewiesen.**



## Ohne Fernglas oder mit einem Fernglas\* der Vergrößerung $n = 1$ :

Beim Schwenken der Blickrichtung in der Horizontalebene ist für alle Sehwinkel  $\alpha, \beta, \dots$  innerhalb des gegebenen Sehfeldes (hier  $2\sigma = 60^\circ$ ) die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \delta/\Delta t$  gleich groß.

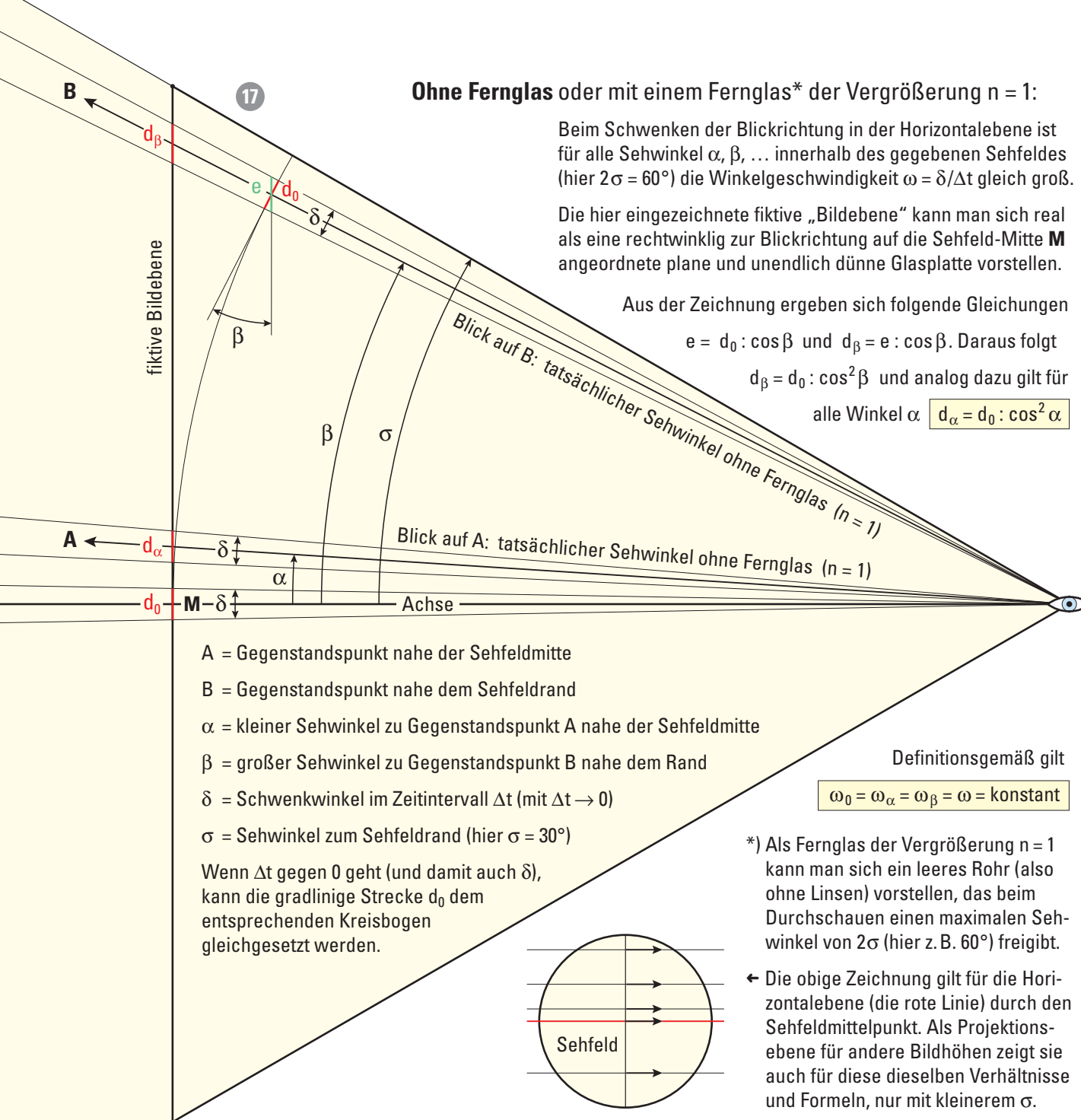
Die hier eingezeichnete fiktive „Bildebene“ kann man sich real als eine rechtwinklig zur Blickrichtung auf die Sehfeld-Mitte **M** angeordnete plane und unendlich dünne Glasplatte vorstellen.

Aus der Zeichnung ergeben sich folgende Gleichungen

$$e = d_0 : \cos \beta \text{ und } d_\beta = e : \cos \beta. \text{ Daraus folgt}$$

$$d_\beta = d_0 : \cos^2 \beta \text{ und analog dazu gilt für}$$

$$\text{alle Winkel } \alpha \quad d_\alpha = d_0 : \cos^2 \alpha$$



## Die Kamera registriert Strecken, das Auge aber Winkel

Eine Kamera liefert ein ebenes Bild, das Auge jedoch hat als Sensorfläche eine sphärisch gewölbte Netzhaut. Im ebenen rechteckigen Kamerabild ist ein Punkt „kartesisch“ z. B. mit horizontalem (x) und vertikalem Abstand (y) von der Bildmitte definiert. Schwenken oder Neigen der Kamera verursacht Verzerrungen (stürzende Linien, Fluchtpunkt-Perspektive), die beim Zusammenfügen mehrerer Bilder zu einem Panorama leider komplizierte Ent- oder Verzerrungen erfordern.

Beim Auge mit kugelförmiger Netzhaut gibt es keine geraden Linien, und ein Bildpunkt ist nicht durch Strecken, sondern „polar“ durch zwei Winkel  $\alpha$  und  $\beta$  (Richtung und Abstand vom Zentrum) definiert. Schwenken und Neigen erzeugen keine Verzerrungen, sondern Winkelverschiebungen. Das ist sowohl bei den unbewussten Sakkaden als auch bei Augendrehungen (Sprüngen) vorteilhaft, mit denen der sehr kleine auf der Fovea scharf gesehene Bereich auf einen großen Bereich des Gesichtsfeldes ausgeweitet wird. Davon profitiert die „Blackbox“ Gehirn bei der Bildverarbeitung, deren Ergebnis man sich vorstellen kann, als ob ein blitzschnell schwenkbarer Laserprojektor alle Bildpunkte mit ihrer Farbe und Helligkeit in die richtige Richtung (Winkel!) eines fiktiven Raums projiziert, den wir für die Wirklichkeit halten.

## Der Tangens macht als Störenfried den Zylindereffekt!

Beim Schwenken, bei (tatsächlichen oder scheinbaren) Sehwinkeln und bei Blickrichtungen des Fernglases oder Auges geht es um **Winkel**. Doch an einer Stelle zwischen Gegenstand und Netzhautbild, wo im Fernglas das Brennweitenverhältnis von Objektiv und Okular die n-fache Vergrößerung bewirkt, werden **nicht Winkel, sondern Strecken** vergrößert. Dort wird die Winkelfunktion Tangens zum Spielverderber: Ein Punkt P im reellen Bild des Fernglasobjektivs mit Abstand a von der optischen Achse wird durch die Vergrößerung von der Achse weg auf den größeren Abstand  $n \cdot a$  verschoben. Doch der Sehwinkel  $\alpha$ , unter dem P relativ zur Achse vor der Vergrößerung zu sehen war, ändert sich **nicht** auf  $\alpha' = n \cdot \alpha$ , sondern nach der Formel  $\alpha' = \arctan(n \cdot \tan \alpha)$ .

Diese nichtlineare Beziehung ist Ursache des Zylindereffekts.

**Mit Fernglas der Vergrößerung n (hier maßstäblich mit n = 8):**

Bei einem nicht verzeichnenden Fernglas der Vergrößerung n hat der Bildpunkt **A'** des realen Gegenstandspunktes **A** die n-fache Bildhöhe des Durchstoßpunktes der Blickrichtung zum Gegenstandspunkt **A** durch die Bildebene; also gilt  $h' = n \cdot h$ .

Die gestrichelten Linien zeigen den Schwenkwinkel  $\delta$  (von der Sehfeldmitte) relativ zum Schwenkwinkel  $\delta'$  nahe dem Rand.

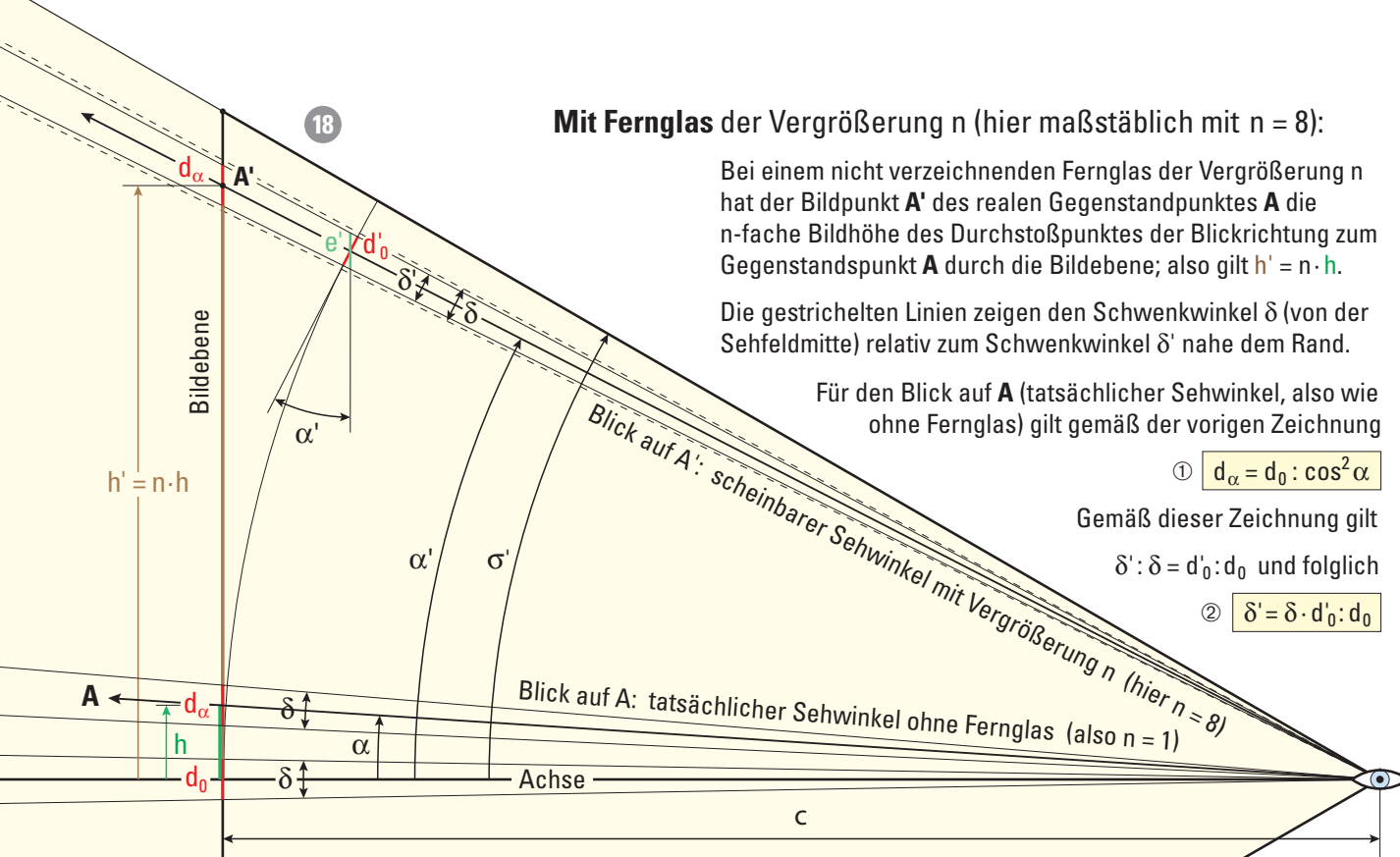
Für den Blick auf **A** (tatsächlicher Sehwinkel, also wie ohne Fernglas) gilt gemäß der vorigen Zeichnung

①  $d_\alpha = d_0 : \cos^2 \alpha$

Gemäß dieser Zeichnung gilt

$\delta' : \delta = d'_0 : d_0$  und folglich

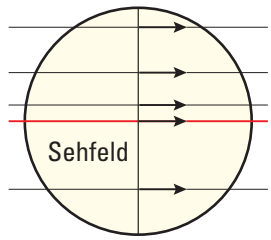
②  $\delta' = \delta \cdot d'_0 : d_0$



Blick auf A': scheinbarer Sehwinkel mit Vergrößerung n (hier n = 8)

Blick auf A: tatsächlicher Sehwinkel ohne Fernglas (also n = 1)

- A = tatsächlicher Gegenstandspunkt in der Ferne
- A' = scheinbarer Bildpunkt von A bei Vergrößerung n (hier n = 8)
- $\alpha$  = tatsächlicher Sehwinkel zum Gegenstandspunkt A
- $\alpha'$  = scheinbarer Sehwinkel zum Bildpunkt A'
- $\delta$  = Schwenkwinkel im Zeitintervall  $\Delta t$  (mit  $\Delta t \rightarrow 0$ )
- Wenn  $\Delta t$  gegen 0 geht (also auch  $\delta$  und  $d_0$ ), können die Strecken  $d_0$  und  $d'_0$  den entsprechenden Kreisbögen gleichgesetzt werden.



← Auch hier zeigt obige Zeichnung die Situation in der durch den Sehfeldmittelpunkt verlaufenden Horizontalebene (rote Linie). Auch hier ergeben sich für beliebige andere Bildhöhen bei vertikaler Projektion auf die Horizontalebene dieselben Verhältnisse und Formeln, nur mit kleinerem  $\sigma'$ .

Gemäß Zeichnung gilt

$h : c = \tan \alpha$  und  $h' : c = n \cdot h : c = \tan \alpha'$

Also ③  $\tan \alpha = \tan \alpha' : n$

Während beim Schwenken der Blickrichtung ohne Fernglas (oder mit einem Fernglas der Vergrößerung n = 1) die Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \delta/\Delta t$  für alle Sehwinkel konstant bleibt, nimmt  $\omega'$  für den Beobachter beim Blick durch ein Fernglas der Vergrößerung n > 1 von der Sehfeldmitte zum Sehfeldrand erst wenig und dann zunehmend stärker ab. Diesen Verlauf können wir als Verhältnis  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0$  wie folgt berechnen (hierbei sind  $\omega'$  die Winkelgeschwindigkeit und  $\alpha'$  der Winkel im Bildraum):

Die vom tatsächlichen Schwenkwinkel  $\delta$  definierte Strecke  $d_\alpha$  verschiebt sich wegen der n-fachen Vergrößerung im Bildbereich nach A' und wird auf  $d'_\alpha = n \cdot d_\alpha$  vergrößert. Weil aber im scheinbaren Sehwinkel auch  $d_0$  zu  $d'_0 = n \cdot d_0$  n-fach vergrößert wird, kürzt sich im Verhältnis  $d'_\alpha : d'_0$  der Faktor n heraus. Daher können wir auch im Bildbereich weiterhin  $d_0$  und  $d_\alpha$  benutzen.

$\omega'_0 := \delta'_0 : \Delta t := \delta : \Delta t$   $\omega$  in der Sehfeldmitte des Bildes  
 $\omega'_{\alpha'} := \delta'_{\alpha'} : \Delta t := \delta' : \Delta t$   $\omega$  bei A' mit Sehwinkel  $\alpha'$  des Bildes

Nun können wir berechnen, wie sich  $\omega'_{\alpha'}$  über den scheinbaren Sehwinkel  $\alpha'$  von der Sehfeldmitte bis zum Rand ändert:

Aus  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = \delta' : \delta$  und ② folgt ④  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = d'_0 : d_0$

Aus  $d'_0 = e' \cdot \cos \alpha'$  und  $e' = d_\alpha \cdot \cos \alpha$  folgt  $d'_0 = d_\alpha \cdot \cos^2 \alpha'$

Mit ① folgt daraus  $d'_0 = (d_0 : \cos^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha'$  und mit ④ folgt

$\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = d'_0 : d_0 = d_0 \cdot \cos^2 \alpha' : \cos^2 \alpha : d_0 = \cos^2 \alpha' : \cos^2 \alpha$

Weil generell gilt ⑤  $\cos^2 \alpha = 1 : (1 + \tan^2 \alpha)$ , wird damit

$\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = \cos^2 \alpha' : \cos^2 \alpha = [1 : (1 + \tan^2 \alpha')] : [1 : (1 + \tan^2 \alpha)]$

oder umgeformt  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = (1 + \tan^2 \alpha) : (1 + \tan^2 \alpha')$ .

Mit ③ folgt daraus  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = (1 + \tan^2 \alpha' : n^2) : (1 + \tan^2 \alpha)$

oder umgeformt  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = (n^2 + \tan^2 \alpha') : n^2 : (1 + \tan^2 \alpha)$

und weiter  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = (n^2 - 1 + 1 + \tan^2 \alpha') : n^2 : (1 + \tan^2 \alpha)$ .

Mit ⑤ folgt daraus  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = (n^2 - 1 + 1 : \cos^2 \alpha') : n^2 : (1 : \cos^2 \alpha)$ ,

dann durch Umformen  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = [(n^2 - 1) \cdot \cos^2 \alpha' + 1] : n^2$

$\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = (1 - 1 : n^2) \cdot \cos^2 \alpha' + 1 : n^2 = \cos^2 \alpha' - \cos^2 \alpha' : n^2 + 1 : n^2$

$\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = \cos^2 \alpha' + (1 - \cos^2 \alpha') : n^2$ ; wegen  $1 - \cos^2 \alpha' = \sin^2 \alpha'$

das Endergebnis  $\omega'_{\alpha'} : \omega'_0 = \cos^2 \alpha' + (\sin \alpha' : n)^2 \rightarrow$  Abb. 15

Nach Cosinus-Satz gilt für das Dreieck **MAB** mit Winkel  $\alpha$   
 Quadratische Gleichung aufgelöst nach  $b$  ergibt

Faktor **2** in Zähler und Nenner gekürzt und ausmultipliziert

Für  $b = b_2$  (- statt  $\pm$ ) gilt:  $b = a \cdot \cos \alpha - [a^2 \cdot (\cos^2 \alpha - 1) + 1]^{1/2}$

Nach Cosinus-Satz gilt für das Dreieck **MAB** mit Winkel  $\varepsilon$   
 Aufgelöst nach  $\varepsilon$

① in ② eingesetzt liefert

$$\textcircled{3} \quad \varepsilon = \arccos \left( \frac{a^2 + 1 - [a \cdot \cos \alpha - (1 - a^2 \cdot \sin^2 \alpha)^{1/2}]^2}{2a} \right)$$

Aus der Zeichnung folgt bei Punkt **B**

$$\textcircled{4} \quad d_\alpha = e \cdot (a - 1) : b$$

und

**M** = Zylinderachse bzw. Mittelpunkt der grauen Kreisfläche

**M** ←

$$\textcircled{5} \quad e = d \cdot \cos(\alpha + \varepsilon)$$

⑤ in ④ eingesetzt liefert

$$\textcircled{6} \quad d_\alpha = d \cdot \cos(\alpha + \varepsilon) \cdot (a - 1) : b$$

Das wird in die rechts oben genannte Gleichung ⑦ eingesetzt und ergibt

$$\omega_\alpha : \omega_0 = d_\alpha : d = d \cdot \cos(\alpha + \varepsilon) \cdot (a - 1) : b : d \quad \text{und gekürzt} \quad \textcircled{8} \quad \omega_\alpha : \omega_0 = \cos(\alpha + \varepsilon) \cdot (a - 1) : b$$

Wenn darin  $\varepsilon$  und  $b$  gemäß ③ und ① ersetzt werden, ergibt sich das Winkelgeschwindigkeits-Verhältnis

$$\omega_\alpha : \omega_0 = \cos \left\{ \alpha + \arccos \left[ \frac{a^2 + 1 - \{a \cdot \cos \alpha - [a^2 \cdot (\cos^2 \alpha - 1) + 1]^{1/2}\}^2}{2a} \right] \right\} \cdot (a - 1) : \{a \cdot \cos \alpha - [a^2 \cdot (\cos^2 \alpha - 1) + 1]^{1/2}\}$$

Wegen  $a^2 \cdot (\cos^2 \alpha - 1) = a^2 \cdot (-\sin^2 \alpha) = -a^2 \cdot \sin^2 \alpha$  lässt sich die sehr lange Gleichung ein wenig vereinfachen zu unserem gesuchten Endergebnis, einer leider immer noch ziemlich langen Gleichung:

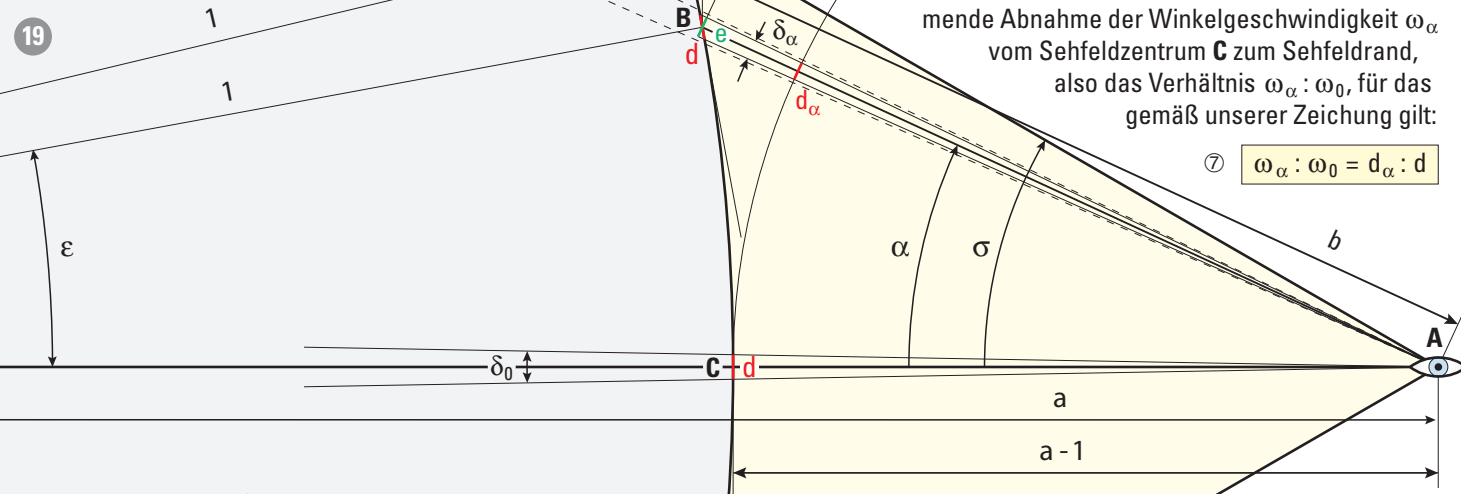
$$\textcircled{9} \quad \omega_\alpha : \omega_0 = \cos \left[ \alpha + \arccos \left\{ \frac{a^2 + 1 - [a \cdot \cos \alpha - (1 - a^2 \cdot \sin^2 \alpha)^{1/2}]^2}{2a} \right\} \right] \cdot (a - 1) : [a \cdot \cos \alpha - (1 - a^2 \cdot \sin^2 \alpha)^{1/2}]$$

### Rotierender Zylinder in endlicher (hier naher) Entfernung:

Die hellgraue Kreisfläche ist die Schnittfläche eines von **A** aus betrachteten rotierenden Zylinders, dessen Radius unsere Längeneinheit 1 sei. Bei der Drehung bewegen sich die auf der Zylinderoberfläche liegenden Punkte **C** im Zentrum des Sehfeldes  $2\sigma$  und **B** im Sehwinkel  $\alpha$  des Betrachters innerhalb des sehr kleinen gegen 0 gehenden Intervalls  $\Delta t$  um denselben Bogen (= Strecke)  $d$ .

Uns interessiert die vom Beobachter **A** wahrzunehmende Abnahme der Winkelgeschwindigkeit  $\omega_\alpha$  vom Sehfeldzentrum **C** zum Sehfeldrand, also das Verhältnis  $\omega_\alpha : \omega_0$ , für das gemäß unserer Zeichnung gilt:

$$\textcircled{7} \quad \omega_\alpha : \omega_0 = d_\alpha : d$$



Weil eine sehr lange Gleichung wie unser Endergebnis ⑨ (links unten) beim Ausrechnen leicht zu Flüchtigkeitsfehlern führen kann, ist es besser, alternativ in drei getrennten Schritten die kürzeren Gleichungen ①, ② und ⑧ wie folgt zu berechnen:

$$b = a \cdot \cos \alpha - (1 - a^2 \cdot \sin^2 \alpha)^{1/2}$$

$$\varepsilon = \arccos \left[ \frac{a^2 + 1 - b^2}{2a} \right]$$

$$\omega_\alpha : \omega_0 = \cos(\alpha + \varepsilon) \cdot (a - 1) : b \quad \rightarrow \text{Abb. 16}$$

Die links als Endergebnis erhaltene Gleichung ⑨ ließe sich evtl. vereinfachen, was aber unnötige Arbeit macht.



## Unser Fazit, die Konsequenzen und welche Abhilfen es geben könnte

Kann der Zylindereffekt beseitigt oder wenigstens abgeschwächt werden?

Wir haben gesehen, dass sich nach dem Vergrößern des reellen Zwischenbildes (trotz der beim Schwenken des Fernglases für alle tatsächlichen Sehwinkel konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ ) innerhalb des scheinbaren Sehwinkels  $2\sigma'$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega'_{\alpha}$  zum Rand hin mit wachsendem Sehwinkel  $\alpha'$  zunehmend verlangsamt.

Die exakte mathematische Berechnung zeigt, dass die **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega'$  von der Mitte des scheinbaren Sehfelds ( $\omega'_0 = n \cdot \omega$ ) zum Rand hin **bei einem Sehwinkel von  $\pm 30^\circ$  sehr genau auf 75% abfällt**. Überraschenderweise gilt das nahezu identisch für alle Ferngläser, Spektive und Fernrohre mit Vergrößerungen ab etwa 6- bis 8-fach (Abb. 15).

Für kleinere scheinbare Sehwinkel endet dieselbe Kurve früher, z. B. für  $\pm 25^\circ$  bei 82%. Dagegen verlängert sich der Kurvenverlauf bei sehr weitwinkligen Ferngläsern. Der Zylindereffekt wird also entsprechend geringfügig schwächer bzw. deutlicher wahrnehmbar.

### Die Wölbung ist eine optische Täuschung

Die bewiesene Wahrnehmung einer zylindrischen Wölbung bedeutet keineswegs, dass das im Fernglas gesehene virtuelle Bild tatsächlich gewölbt ist. Schließlich haben alle Optikdesigner versucht, die Bildfeldwölbung so zu korrigieren, dass der verbliebene Rest sich höchstens noch als leichte Verstärkung der von mehreren anderen Restaberrationen verursachten Randunschärfe auswirkt.

Wenn das **Fernglasbild fast perfekt eben** ist, wie kann es sich dann plötzlich wölben, sobald das Fernglas geschwenkt wird? Das optische Linsen-Prismen-System ändert sich

doch nicht beim Schwenken. Somit kann die zylindrische Wölbung nur eine vom Abfall der Winkelgeschwindigkeit zum Bildrand ausgelöste optische Täuschung sein: **Unser Gehirn registriert etwas**, das ihm nur aus der Erfahrung mit gewölbten Oberflächen bekannt ist **und assoziiert es mit seiner Erfahrung**.

### Warum sieht nicht jeder den Zylindereffekt?

Der bei etwa  $60^\circ$  scheinbarem Sehwinkel erstaunlich große Abfall der Winkelgeschwindigkeit zum Rand um etwa 25% wirft die Frage auf, **warum nicht jeder** den vermeintlich unübersehbaren **Zylindereffekt wahrnimmt**. Die Antwort: Jede sinnliche Wahrnehmung, z. B. von Geräuschen, Helligkeit, Farbschieden, hat eine **Ansprechschwelle**, unterhalb der noch nichts wahrgenommen wird. Die Evolution hat unsere Sinne um so besser geschärft, je wichtiger sie für das Überleben sind. Das **Erkennen einer Winkelgeschwindigkeits-Abnahme** hat allerdings über Jahrtausende keine Rolle gespielt, und auch jetzt, seit wir Ferngläser haben und nutzen, hat die Mehrzahl aller Menschen, von einer eventuellen Militärdienstzeit abgesehen, noch kein Fernglas gehabt und durchgeschaut, und wenn, dann dabei das Fernglas kaum oder nie geschwenkt. Wie soll sich da eine Sensitivität für so einen Nebeneffekt entwickeln?

### Wäre es bei rechteckigem Bild genauso?

Erstaunlicherweise wird sogar diese Frage manchmal gestellt, obwohl der **Winkelgeschwindigkeitsverlauf** von Rand zu Rand bei einem rechteckigen Bild prinzipiell **derselbe** wäre, also auch der Zylindereffekt. Trotzdem lohnt es sich, kurz darüber nachzudenken.

Die gerade Rechteckbegrenzung würde eine **Krümmung** benachbarter **senkrechter Bildstrukturen** nur beim „Globuseffekt“ wegen der tonnenförmigen Verzeichnung betonen. Den gibt es jedoch nicht, und beim Zylindereffekt bleiben alle Senkrechten gerade.

Allenfalls könnte ein rechteckiges Fernglasbild die **Wahrnehmung des Zylindereffekts abschwächen**, weil es stets schmaler als ein rundes ist. Das rotationsymmetrische Linsensystem erzeugt prinzipiell ein rundes Bild. Die Rechteckdiagonale ist maximal der Kreisdurchmesser, die Breite wäre z. B. beim Quadrat nur 71%, also  $22,3^\circ$  Sehwinkel, bei dem die Winkelgeschwindigkeit auf 86% abfiel (Abb. 15). Würden Fernglaskäufer für diesen etwas geringeren Zylindereffekt ein um 36% kleineres quadratisches Bild akzeptieren?

### Wie man den Zylindereffekt beheben könnte

Die zum Rand zunehmende Komprimierung senkrechter Linien in Abb. 9 wäre mit einer nur horizontalen positiven Verzeichnung **ohne Krümmung von Senkrechten** kompensierbar. Dazu wäre ein spezielles anamorphotisches System aus Zylinderlinsen mit zum Winkelgeschwindigkeitsabfall gegenläufiger Bildspreizung nötig. Aber dann wäre das Fernglas viel schwerer, größer und **wohl doppelt so teuer**.

Eine herkömmliche **kissenförmige Verzeichnung** kann den Zylindereffekt ebenso reduzieren. Sie ist problemlos mit sphärischen Linsen realisierbar und wird seit Jahrzehnten benutzt, hat aber störende **Nebenwirkungen: randnahe gerade Linien**, nicht nur senkrechte, sondern alle mit annähernd tangentialer Ausrichtung **werden gekrümmt**. Wie störend die leider dann auch bei nicht geschwenktem Fernglas bestehen bleibende Krümmung ist, hängt vom Verlauf und Ausmaß der Verzeichnung ab. Bei  $\pm 30^\circ$  Sehwinkel wäre die auf

75% reduzierte Winkelgeschwindigkeit  $\omega'_{30^\circ}$  für vollständige Kompensation auf 100% zu erhöhen. Auf den ersten Blick scheint also eine gigantische Verzeichnung von 33% nötig zu sein. Aber es genügt viel weniger, da die Verzeichnung nicht auf Winkel, sondern auf Strecken im Fernglasbild anzuwenden ist:

Ein Betrachter im Abstand  $a$  vor der ebenen Wand  $E$  in Abb. 12 sieht dort ohne Fernglas einen Punkt  $P$  unter dem tatsächlichen Sehwinkel  $\alpha$  auf der Wand um  $p = a \cdot \tan \alpha$  von der Sehfeldmitte entfernt. Ein  $n$ -fach vergrößerndes Fernglas zeigt  $P$  dann in  $n$ -fachem Abstand  $p' = n \cdot a \cdot \tan \alpha$  von der Sehfeldmitte.

Um den Zylindereffekt gänzlich zu beheben, müsste die Winkelgeschwindigkeit  $\omega^*$  im scheinbaren Sehwinkel konstant das  $n$ -fache der Schwenk-Winkelgeschwindigkeit sein, also  $\omega^* = n \cdot \omega$  und analog dazu  $\alpha^* = n \cdot \alpha$ .

Entsprechend müsste  $P$  im scheinbaren Sehfeld um  $p^* = a \cdot \tan \alpha^* = a \cdot \tan (n \cdot \alpha)$  neben der Sehfeldmitte liegen. Um die Strecke  $p'$  auf  $p^*$  zu verlängern, ist eine Verzeichnung  $v = p^* : p' = a \cdot \tan (n \cdot \alpha) : (n \cdot a \cdot \tan \alpha)$  oder

$$v = \tan (n \cdot \alpha) : (n \cdot \tan \alpha)$$

nötig. Für 8fach vergrößernde Ferngläser mit  $2\sigma' = 60^\circ$  und  $\sigma = 4,12781^\circ$  wäre am Sehfeldrand eine **Verzeichnung von 1,1258-fach** oder in üblicher Schreibweise von +12,58% nötig. Das ist viel weniger als die oben erwarteten 33%, aber immer noch viel und würde randnahe Geraden stark kissenförmig krümmen. Aber da der Winkelgeschwindigkeits-Abfall offenbar **nahe an der Wahrnehmungsgrenze** (Ansprechschwelle) liegt, sollte bereits **ein Drittel bis zu maximal die Hälfte dieser Verzeichnung** zur Zylindereffekt-Unterdrückung reichen. Das ist aber leider nicht mehr mathematisch zu klären, sondern erforderte Tests mit einem großen Versuchspersonen-Panel.

## Was ist Verzerrung, was ist Verzeichnung?

Wer nicht nur mit Ferngläsern, sondern auch mit Kameras vertraut ist, kennt die Begriffe Verzerrung und Verzeichnung. Nicht alle aber kennen den Unterschied zwischen beiden:

**Verzerrungen** in fotografischen Aufnahmen sind perspektivisch bedingte Bilddeformationen. **Fluchtpunktperspektive** ist die harmloseste perspektivische Verzerrung (senkrechte Linien bleiben senkrecht, aber horizontale, nicht zur Bildebene parallel verlaufende konvergieren zu Fluchtpunkten auf der Horizontlinie). **Stürzende Linien** jedoch können sehr stören, denn senkrechte Linien bleiben nicht parallel, sondern konvergieren bei nach oben (hohe Gebäude) oder unten gekippter Kamera (bei Sachaufnahmen in schräger Draufsicht) zu Fluchtpunkten nach oben bzw. unten.

In weiterem Sinne sind bei extremen Weitwinkelaufnahmen auch die **randnahe radiale Streckung** (Personen werden zu breit, Köpfe in den Ecken schräg elliptisch) und eine **übertriebene Tiefenwirkung** als fast immer unerwünschte Verzerrungen anzusehen.

Alle diese Verzerrungen verschwinden aber, wenn man die ebenen Bilder ebenso schräg (seitlich, von unten oder oben) und aus dem „richtigen“ Abstand betrachtet, der sich zur Bildgröße ebenso verhält wie die Aufnahmeentfernung zur Originalgröße des fotografierten Gegenstandes. **Verzerrungen sind keine Abbildungsfehler**, sie entsprechen den geometrischen Regeln der Zentralperspektive und verschwinden bei Betrachtung aus der „richtigen“ Richtung und Entfernung.

**Verzeichnung** ist dagegen ein vom optischen System erzeugter Abbildungsfehler, der die Maßstäblichkeit der zentralperspektivischen Bildwiedergabe durch eine von der Bildmitte zum Rand allmählich größer (kissenförmige)

oder kleiner werdende Abbildung (tonnenförmige Verzeichnung) beeinträchtigt und randnahe gerade Linien deutlich sichtbar krümmt.

Bei **kissenförmiger Verzeichnung** werden alle außermittigen Bildpunkte mit wachsendem Abstand von der Mitte zunehmend radial nach außen verschoben, als ob die Brennweite des Objektivs im Randbereich allmählich länger würde. Die am deutlichsten sichtbare Folge ist eine nach außen konkave Wölbung gerader randnaher Linien, vor allem bei annähernd tangentialem Verlauf. Nur gerade Linien durch die Bildmitte bleiben immer perfekt gerade. Bei starker kissenförmiger Verzeichnung fällt auch eine radiale Streckung von Gegenständen am Rand störend auf.

Bei **tonnenförmiger Verzeichnung** werden umgekehrt alle außermittigen Bildpunkte mit wachsendem Abstand von der Mitte immer stärker radial zur Mitte hin verschoben, als würde die Brennweite zum Randbereich hin allmählich kürzer. Annähernd tangential verlaufende gerade Linien nahe dem Bildrand werden folglich nach außen konvex gewölbt. Gerade Linien durch die Bildmitte bleiben auch hier gerade, und bei starker tonnenförmiger Verzeichnung werden alle randnahen Gegenstände deutlich sichtbar gestaucht.

Beide Verzeichnungsarten sind durch Kurven darstellbar, die entweder den nach außen zu- bzw. abnehmenden **Vergrößerungsfaktor** oder (die üblichere Variante) die **prozentuale Zu- bzw. Abnahme des Abbildungsmaßstabs** in Abhängigkeit von der Bildhöhe (= radialer Abstand von der Bildmitte) angeben. Oft wird gesagt, dass ein Faktor  $> 1$  oder ein positiver Prozentwert kissenförmige und ein Faktor  $< 1$  oder ein negativer Prozentwert tonnenförmige Verzeichnung bedeute. Aber das stimmt nicht immer; richtig ist nämlich nur, dass eine **aufsteigende Kurve** (selbst wenn sie im nega-

tiven Bereich liegt) **kissenförmige** und eine **abfallende Kurve** (auch im positiven Bereich) **tonnenförmige Verzeichnung** darstellt. Bei Weitwinkelobjektiven kann die Verzeichnung evtl. sogar zwischen leicht tonnenförmig und kissenförmig wechseln, was am Rand gewellte Linien (in „Moustache“-Form) zur Folge hat.

Bei üblichen Objektiven ist die Verzeichnung radialsymmetrisch, bei Objektiven aus Zylinderlinsen ist sie nur quer zur Zylinderachse, was zur Behebung des Zylindereffekts ideal wäre, weil er ebenfalls nur in einer Richtung wirkt. Ein Vorteil wäre auch, dass senkrechte und waagerechte Linien gerade bleiben und nur schräge sich minimal S-förmig verbiegen. Schade, dass diese Lösung zu aufwendig ist.

## Verzeichnung hilft gegen den Zylindereffekt

Auf der vorigen Seite hatten wir zur Berechnung der zur völligen Behebung des Zylindereffekts nötigen Verzeichnung die Formel

$$\textcircled{1} \quad v = \tan(n \cdot \alpha) : (n \cdot \tan \alpha)$$

gefunden, die bei 8facher Vergrößerung und einem scheinbaren Sehwinkel von  $2\sigma' = 60^\circ$  den Verzeichnungsfaktor 1,1258 bzw. +12,58% für den Rand des Fernglasbildes liefert.

Aber es kommt für bestmögliche Behebung des Zylindereffekts nicht nur darauf an, wie hoch der Wert am Bildrand ist, sondern auch, in welcher Form die **Verzeichnungskurve** von der Mitte bis zum Rand verläuft. Das wird üblicherweise jedoch nicht durch eine vom tatsächlichen Sehwinkel  $\alpha$  (wie oben), sondern von der prozentualen Bildhöhe (Abstand von der Bildmitte) abhängige Formel angegeben. Also formen wir die obige Gleichung so um, dass **als Variablen nur die Vergrößerung n und die relative Bildhöhe h\*** (0% = Bildmitte, 100% = Bildrand) vorkommen, wobei uns die große Abbildung auf Seite 7 helfen wird.

Wir benutzen die Größen  $n$ ,  $c$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma'$ ,  $h$  und  $h'$  aus der Abbildung auf Seite 7 und außerdem  $r' =$  Radius des vergrößerten Bildkreises und  $h^* =$  relative Bildhöhe  $h' : r'$ . Es gilt dann

$$h' = n \cdot h = n \cdot c \cdot \tan \alpha$$

$$r' = c \cdot \tan \sigma'$$

$$h^* = h' : r' = n \cdot \tan \alpha : \tan \sigma'$$

$$\tan \alpha = h^* \cdot \tan \sigma' : n$$

$$\alpha = \arctan(h^* \cdot \tan \sigma' : n)$$

Einsetzen in  $\textcircled{1} \quad v = \tan(n \cdot \alpha) : (n \cdot \tan \alpha)$  ergibt

$$v = \tan[n \cdot \arctan(h^* \cdot \tan \sigma' : n)] : (n \cdot h^* \cdot \tan \sigma' : n)$$

$$\textcircled{2} \quad v = \tan[n \cdot \arctan(h^* \cdot \tan \sigma' : n)] : (h^* \cdot \tan \sigma')$$

Beispiel: Bei Vergrößerung  $n = 8$  und  $\sigma' = 30^\circ$  ist  $\tan \sigma' = 0,57735$ . Die Formel lautete dann

$$v_8 = \tan[8 \cdot \arctan(0,072169 \cdot h^*)] : (0,57735 \cdot h^*)$$

Abb. 20 zeigt für beliebige Vergrößerungen ab 2fach und beliebige scheinbare Sehwinkel bis  $2\sigma' = 80^\circ$  wie bei Fotoobjektiven üblich die **Verzeichnung  $v^* = (v - 1) \cdot 100$  in Prozent zur vollständigen Behebung des Zylindereffekts**. Ferner gibt sie die empfohlene Korrektur um  $0,33 \cdot v^*$  bis  $0,5 \cdot v^*$  an, die ausreicht, um den Zylindereffekt nicht mehr wahrzunehmen und dabei zu starke Verzeichnung zu vermeiden.

